# Изучение динамических систем с использованием компьютера[1]

**К. Симо**[*]
Dept. de Matemàtica Aplicada i Anàlisi Univ. de Barcelona
Gran Via 585, 08007 Barcelona, Spain
E-mail: carles@maia.ub.es.

Хорошо известно, что чисто аналитические методы подходят для доказательства результатов о существовании и получения некоторой локальной или полуглобальной информации о динамике системы. Если же необходимо провести более подробное исследование или, что происходит во многих случаях, сделать предположения (с целью последующего доказательства) относительно свойств изучаемой системы, возникает необходимость использования компьютера. В этих заметках я описываю несколько областей, где систематическое использование компьютера может нам помочь при изучении данного семейства динамических систем, а также привожу несколько примеров.

It is a well known fact that purely analytical methods are suitable to prove existence results and to get some local or semiglobal information on the dynamics of a system. If a more detailed study is desired or, in many cases, if one has to guess first the properties to be proven, we have to proceed to do a computer assisted study of the problem. In these notes I summarize several domains where a systematic use of a computer can help us to learn about a given family of dynamical systems and provide some examples.

Keywords: dynamical system, numerical integration, computer studies.
Mathematical Subject Classifications: 70-02

## 1. Введение

При изучении семейства динамических систем (ДС) некоторого рода (либо непрерывные, заданные векторным полем $f$, либо дискретные, заданные отображением $F$ в малой или бóльшей размерности) возникает много вопросов, которые можно исследовать с помощью компьютера. Возможная классификация может учитывать несколько аспектов в зависимости от наших целей.

**Цель.** При исследовании мы можем стремиться к достижению нескольких целей:

1) угадать свойства ДС или некоторых конкретных траекторий;
2) проиллюстрировать теоретический результат или проверить его физическое значение;
3) подробно исследовать систему для выделения основных свойств, а также проследить, как они могут эволюционировать как функции от параметров (например, меры множеств регулярных или хаотических траекторий);

[1] C. Simó. *Computer assisted studies in dynamical systems*. In: Progress in nonlinear science. Vol. I: Mathematical problems of nonlinear dynamics (Eds.: L. M. Lerman, L. P. Shilnikov). Univ. Nizhny Novgorod Press, 2002, p. 152–165. Пер. с англ. А. Г. Арзамасцева.

[*] В честь 60-летия К. Симо организуется Съезд по динамическим системам, проводимый с 29. 05. 2006 по 03. 06. 2006 в Барселоне, Испания. Более подробная информация о Carles Simó Fest представлена в разделе «Научные мероприятия».

4) произвести громоздкие доказательства, которые теоретически могут быть выполнены вручную, но требуют слишком больших затрат по времени;
5) получить информацию об оптимальных областях справедливости теоретического результата.

**Модели.** С теоретической точки зрения, мы можем исследовать систему как есть, не имея ввиду никаких конкретных приложений. Но в случае, когда динамические системы возникают как математическая модель физического явления, нам необходимо произвести некоторое упрощение реальности. Также верно, что при изучении модели для избежания сложностей нам приходится вводить несколько *подмоделей*. Мы можем рассмотреть:

1. Создание цепочки систем с возрастающей сложностью или, наоборот, получение сначала достаточно полной модели для анализа влияния различных компонент, а затем перехода к наилучшим упрощениям.
2. Вывод моделей для отображений возвращения в окрестности инвариантного объекта. Они могут быть получены с помощью объединения локальных разложений в этой окрестности $U$ объекта (например, при использовании нормальных форм в $U$) с аналитическими аппроксимациями возвращений к $U$ (внешнее отображение). Коэффициенты аппроксимации возвращения могут быть получены при помощи численного интегрирования или численных итераций.
3. Получение аналитических аппроксимаций для $f$ или $F$ с помощью подбора по экспериментальным данным. Может случиться, что аналитическое выражение для $f$ или $F$ существует, но вычисление его будет слишком громоздким. Тогда мы можем действовать, как будто у нас имеются экспериментальные данные, при этом мы получаем преимущество, поскольку мы можем выбрать точки, в которых производится *эксперимент*.
4. Подробный анализ некоторых парадигматических моделей для изучения новых явлений и механизмов.

**Объекты.** В ДС существуют различные объекты, играющие ключевую роль в динамике. Они представляют собой «скелет» динамики, и поведение системы может быть большей частью определено, если мы знаем эти объекты, характер их взаимосвязи, возможные переходы от одного к другому и длительность этих переходов. Предположим, для определенности, что система дискретная. Неполный и взаимно пересекающийся список может быть представлен в следующем виде:

1. Неподвижные точки и периодические траектории. Инвариантные кривые, инвариантные торы и другие инвариантные многообразия, имеющие нейтральное поведение, когда мы ограничиваем систему на них.
2. Инвариантные объекты канторова типа или, в локальном случае, канторово множество, умноженное на многообразие.
3. Устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия (нормально, частично или, возможно, слабо-) гиперболических объектов, которые возникают среди вышеперечисленного.
4. Пересечение ранее упомянутых инвариантных многообразий: гомоклинические и гетероклинические объекты.
5. Другие объекты, которые еще не достаточно идентифицированы и классифицированы, такие как странные аттракторы и репеллеры.

**Подход.** Динамические системы могут быть рассмотрены с различных, причем и взаимно пересекающихся, точек зрения.

1. Траекторный подход: нас интересует поведение некоторых траекторий системы.
2. Геометрический подход: основная цель — геометрическое описание некоторых объектов.
3. Функциональный подход: мы рассматриваем траектории или инвариантные объекты как неподвижные или критические точки функционала в подходящем пространстве (например, вариационные методы классической механики).
4. Параметрический подход: все обнаруженные объекты могут зависеть от параметров системы. Ключевым объектом является возможное продолжение и бифуркации, обнаруживаемые при изменении параметров. Часто некоторые объекты существуют для множества параметров, которое может быть в свою очередь канторовым. Хорошей стратегией является совместное изучение фазовых пространств переменных и параметров.
5. Статистический подход: ввиду сложности динамики мы рассматриваем статистические характеристики. В частности, мы можем рассматривать меры инвариантные под действием системы.

В любом случае следует иметь в виду, что наиболее важное слово во всех исследованиях — это слово *динамика*. Набор точек, принадлежащих некоторым траекториям, несет в себе части информации, но гораздо важнее знание того, *как* возникают эти точки, т. е. *эволюция во времени*.

**Инструменты и средства.** Используемые математические средства зависят от выбранного подхода. Сейчас я приведу грубую классификацию методов, используемых в исследованиях с помощью компьютера.

1. *Символьные вычисления*. Представляя (или аппроксимируя) траектории или инвариантные объекты как функции некоторого класса (например, полиномы или ряды Фурье), мы можем рассматривать их как решения системы или как формальные инварианты, а затем выводить отношения между коэффициентами представлений. Коэффициенты могут быть числами некоторого класса (например, рациональные числа), которые можно использовать как есть или аппроксимировать их вещественными числами.
2. *Прямые численные методы*. Мы хотим аппроксимировать численные значения для траектории в некоторые периоды времени, или описать многообразие, задавая значения в точках некоторой решетки, или определить значение параметра, при котором происходят гомоклинические касания, и т. п. В этих методах обычно используется численное интегрирование, вычисление нулей функций, теория аппроксимации и т. д.
3. *Гибридные методы*. Довольно часто плодотворным оказывается объединение первых двух методов. Инвариантные неустойчивые многообразия могут быть аппроксимированы локально с помощью символьных вычислений, а затем распространены на все пространство с помощью численного интегрирования. Инвариантность тора, представленного рядом Фурье, может возникнуть вследствие совпадения (с точностью до некоторого порядка) с анализом Фурье образа, полученного с помощью итераций.

В любом случае следует иметь в виду, что все эти вычисления могут быть выполнены с произвольной точностью (например, тысяча цифр) и с использованием интервальной арифметики. Я хочу обратить особое внимание на то, что мы можем вычислить не только траектории, но, скажем, также вариации относительно начальных условий и параметров. Это является ключевым моментом при превращении численных исследований в строгое доказательство.

Также следует обратить внимание на вычислительную сложность используемых алгоритмов. Они должны быть применимы не только в теории, но и на практике. Это приводит к интересным задачам оптимизации. Например, при использовании гибридных методов для порождения очень слабо неустойчивого инвариантного многообразия следует определить оптимальный порядок локального разложения для минимизации общего времени вычислений с контролируемыми значениями ошибок.

**Размерность.** К сожалению, хорошее описание динамики неэлементарной системы с помощью компьютера возможно только для относительно малых размерностей. В начале двадцать первого века наибольшей такой размерностью, если учитывать размерности фазового пространства и пространства параметров, будет, я думаю, 7. Это во многом зависит от самой системы и необходимой степени детализации. По-видимому, мы скоро достигнем и значения 10.

Совершенно другой вопрос возникает, если нас интересует лишь несколько траекторий (например, метеорологический прогноз). Усилия, связанные с наилучшим способом (то есть правильным и дешевым) представления решений эволюционного уравнения в частных производных, должны позволить нам использовать для этих уравнений подход динамических систем.

В последующем я приведу несколько примеров, которые проиллюстрируют некоторые аспекты исследований с помощью компьютера в динамических системах. Описание численных методов для вычисления различных объектов см. в [16, 18]. Обширное исследование системы и подробное описание требуемых средств см. в [1, 2, 3, 4, 7, 20, 22].

## 2. Некоторые примеры

В этой части я приведу примеры, выбранные в традиционной области, которые покажут, как численные и символьные исследования помогают определить интересующие нас свойства системы.

### 2.1. Задача Ситникова

Это хорошо известная задача из области ограниченной задачи трех тел (см., например, Мозер [15]). Рассмотрим два тела равной массы (=1/2), движущиеся по эллиптическим орбитам вокруг общего центра масс. Предположим, что эти тела (основные тела) лежат на горизонтальной плоскости, проходящей через начало координат в $\mathbb{R}^3$, и эксцентриситет орбиты равен $e$. Третья частица нулевой массы движется под действием основных тел по оси $z$ (вертикальная ось, проходящая через начало координат). Уравнения движения имеют вид

$$\dot{z} = v, \quad \dot{v} = -z(z^2 + r^2/4)^{-3/2},$$

где $r$ обозначает расстояние между основными телами и точка означает производную по времени. Система является неавтономной гамильтоновой с одной степенью свободы. Пусть $u$ — эксцентрическая аномалия основных тел. Тогда, нормализуя расстояние, мы можем положить $r = 1 - e\cos(u)$. Состояние системы описывается тройкой $(z, v, u)$. Отметим, что $u$ можно считать временно́й переменной. Время и $u$ связаны уравнением Кеплера $t = u - e\sin(u)$.

Мы можем рассмотреть прохождения частицы через $z = 0$. Они происходят при некоторых значениях $v, u$. Эти значения вместе с $z = 0$ полностью описывают движение. Следовательно, мы можем изучить некоторую траекторию, рассмотрев последовательные проходы через $z = 0$. Разумеется, точка может уходить на бесконечность при положительном и отрицательном времени, тогда проходов через эту точку больше не будет. Нас интересует граница, определяющая область убегания. Ввиду симметрии задачи

$$(z, v, u) \leftrightarrow (z, -v, -u) \quad \text{и} \quad (z, v, u) \leftrightarrow (-z, -v, u)$$

достаточно изучать, что происходит при положительном времени.

Если $e = 0$, система является автономной и граница задается некоторым постоянным значением $v$, независящим от значения $u$. Удобно определить границу следующим образом. Рассмотрим движение вблизи бесконечности (при $z > 0$). В этом случае удобно ввести, так называемые координаты МакГихи $(q, p)$ (подробности см. в [15]):

$$z = 2q^{-2}, \quad v = -p.$$

Когда $z \to \infty$, $q \to 0$ в координатах $(q, p)$ (или в координатах «на бесконечности»), точка с координатами $(q, p) = (0, 0)$ будет неподвижной точкой. Но, поскольку $u$ продолжает двигаться периодически, мы можем рассматривать ее как «периодическую траекторию на бесконечности». Она является слабо гиперболической, и основной результат МакГихи [11] показывает, что она имеет инвариантные устойчивое и неустойчивое многообразия. Эти многообразия могут быть продолжены до плоскости $z = 0$. Пересечение устойчивого многообразия определяет границу (в $(v, u)$) начальных условий, приводящих к уходу.

Следовательно, нам нужно вычислить инвариантные многообразия, и мы выполним это вычисление при произвольных значениях эксцентриситета. Удобно представить многообразие в виде

$$p = \sum_{k \geqslant 1} a_k(u, e) q^k = \sum_{k \geqslant 1} \Big( \sum_{j,m} a_{j,m,k} e^j g^m \Big) q^k,$$

где $g$ обозначает либо $\cos$, либо $\sin$ в зависимости от четности. Задача сводится к вычислению коэффициентов $a_{j,m,k}$. Интересно отметить, что в [11] доказано, что многообразие является аналитическим, за исключением, возможно, точки $q = 0$. Следовательно, мы не можем считать, что сходимость выполняется автоматически.

Это типичный простой пример символьных вычислений. По индукции следует, что $a_k(u, e)$ является тригонометрическим полиномом по $u$ и коэффициенты гармоник являются полиномами по $e$. Нами была реализована простая процедура для определения этих коэффициентов. Число коэффициентов, необходимых для достижения максимального порядка $k = n$, приближенно равно $n^3/48$, и вычислительная сложность равна $O(n^6)$ (с маленькой асимптотической константой!). Поэтому, чтобы достичь значения $n = 100$, потребуется меньше одной секунды процессорного времени на современном персональном компьютере, и для достижения порядка 300 (для которого количество коэффициентов равно 562 532) приближенно потребуется пять минут. Более того, легко определить, что существует относительно мало полезных гармоник. Если при любом порядке мы будем отбрасывать коэффициенты, для которых $|a_{j,m,k}| < 10^{-30} \max\{|a_{j,m,k}|\}$, тогда для получения порядка 300 потребуется лишь немногим больше одной минуты и сохранится лишь 73 517 коэффициентов.

Возможность получения достаточно большого порядка удобна по следующим двум причинам:

- Можно угадать оценку для коэффициентов. Это действительно так для нашей задачи. Тогда можно сделать разумное предположение и в конце концов доказать следующую теорему:

  **Теорема 1.** *Для инвариантных многообразий периодических траекторий на бесконечности в задаче Ситникова для всех $e \in [0:1)$ и $u \in [0, 2\pi]$ имеем $|a_k(u, e)| < C(k!)^{1/3}$ для некоторого $C > 0$.*

  В частности, это показывает неаналитичность и определяет конкретную характеристику многообразия по Жевре.

- Для определения границы на $z = 0$ следует действовать следующим образом: сначала используется предыдущее представление для вычисления $p(u, q)$ при данном $e$. Следует взять сетку по переменной $u$. Затем численное интегрирование позволяет нам достичь $z = 0$. Интересно использовать значение $q$ настолько большое, насколько возможно (с контролируемой ошибкой) для минимизации ошибок и времени, требующегося для численного интегрирования уравнений движения. Асимптотический характер представлений многообразия и точные значения границ позволят показать, что, равномерно по $(u, e)$, порядок 80 является оптимальным, если используется стандартная арифметика двойной точности. Это означает, что значения по величине примерно порядка $q = 0,3$ могут быть взяты для представления многообразия с малой ошибкой.

Подробности, результаты и приложения см. в [8].

## 2.2. Столкновения в ньютоновой задаче $N$ тел

Хорошо известно, что одна из основных сложностей в ньютоновой задаче $N$ тел — это возможное существование столкновений, когда два тела стремятся к одному и тому же положению при $t \to t^*$ для некоторого $t^*$. Это приводит к сложностям, поскольку уравнения движения больше не являются верными. Но даже если точного столкновения не происходит, а есть всего лишь тесное сближение, возникают численные сложности и проявляется сильная зависимость от начальных условий.

Как с теоретической, так и с практической точки зрения нам стоит посмотреть, могут ли происходящие столкновения быть регуляризованы в некотором смысле. Естественным условием будет требование восстановления непрерывности относительно начальных данных, если исключаются траектории столкновения.

Как известно, одиночные двойные столкновения (когда существуют в точности два тела $i$ и $j$ такие, что взаимное расстояние $r_{i,j} \to 0$, когда $t \to t^*$) являются регуляризуемыми. С другой стороны, столкновения, связанные с тремя или более телами, в общем случае нерегуляризуемы. Они могут быть регуляризуемы в некоторых подзадачах.

Естественно, возникает вопрос по оставшейся части задачи: несколько пар тел $i_k, j_k$, $k = 1, \ldots, m$, имеют двойные столкновения одновременно в различных местах, а остальные тела не включаются ни в какие столкновения. Известно, что эта задача является регуляризуемой, но никакой информации о степени дифференцируемости регуляризации не имеется.

Эти соображения привели к выполнению тщательных численных экспериментов в [9] (где также можно найти сведения о происхождении задачи). Конкретная исследуемая задача — это подзадача задачи четырех тел так называемого двуравнобедренного типа. Предположим, что массы удовлетворяют соотношениям $m_1 = m_2$, а $m_3$ и $m_4$ — произвольные. Необходимо, чтобы тела все время двигались на плоскости с координатами вида $(x_1, y_1)$, $(-x_1, y_1)$, $(0, y_3)$, $(0, y_4)$. Без ограничения, можно предположить, что $2m_1y_1 + m_3y_3 + m_4y_4 = 0$. Следовательно, система является гамильтоновой с тремя степенями свободы. Одновременные двойные столкновения могут произойти, если $x_1 = 0$, $y_3 = y_4 \neq y_1$.

Предположим, что некоторые начальные условия $w_0$ при $t = 0$ в фазовом пространстве приводят к одновременным двойным столкновениям в некоторый момент времени $t^* > 0$. Можно взять аналитическую дугу начальных условий $w(s)$, параметризованную величиной $s$ в окрестности $s = 0$, так, чтобы $w(s = 0) = w_0$, и такую, чтобы при $0 \leqslant t \leqslant t^{**}$ при некотором $t^{**} > t$ не происходило одновременных двойных столкновений, если $s \neq 0$. Тогда образ дуги можно вычислить численно. Результат весьма удивителен. Образ дуги оказывается в точности $\mathcal{C}^{8/3}$ с поведением вида $s^{8/3}$ вокруг $s = 0$.

Этот результат был позднее доказан в [10], и была сформулирована следующая теорема:

**Теорема 2.** *Одновременные двойные столкновения в плоской задаче четырех тел являются $\mathcal{C}^{8/3}$ регуляризуемыми. Для большинства масс результат является точным.*

Из доказательства становится ясно, что результат может быть обобщен на любое число тел и размерностей.

## 2.3. Критерии интегрируемости, основанные на вариациях высокого порядка

В этом примере мы рассмотрим аналитические гамильтонианы. Большинство гамильтоновых систем являются неинтегрируемыми. Однако интегрируемые системы играют важную роль в виду ясной структуры фазового пространства, а также потому, что они могут быть использованы в качестве начальных точек для изучения близлежащих неинтегрируемых систем. Удобно иметь критерии, чтобы сделать вывод об интегрируемости системы.

Знаменитая теорема Зиглина [24] (и многие другие ее версии) определяет необходимое условие, основанное на рассмотрении вариационных уравнений первого порядка вдоль некоторого конкретного семейства решений. Первая сложность в очень простых примерах возникает, когда мы рассматриваем семейство потенциалов Хенона–Хейлеса (Х–Х)

$$H = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2) + \frac{1}{3}x_1^3 + \lambda x_1 x_2^2,$$

где $\lambda$ — вещественный параметр. «Классическая» система получается, когда $\lambda = -1$. Из результатов Зиглина следует, что классическая Х–Х система является неинтегрируемой, и, фактически, доказано, что для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, за исключением четырех значений, система является неинтегрируемой.

Что же происходит при исключительных четырех значениях? Для трех из них прямая проверка показывает, что система является интегрируемой (получением дополнительного первого интеграла). Четвертое значение — $\lambda = 1/2$. Непосредственное численное моделирование с использованием подходящего сечения Пуанкаре и значений энергии не слишком близких к нулю (скажем, по меньшей мере, $h = 0.2$) показывает, что система не является интегрируемой. Эти свидетельства требуют от нас теоретических результатов, позволяющих доказать неинтегрируемость, когда мы не можем ее определить из теоремы Зиглина.

При исследовании на интегрируемость оказался полезным альтернативный подход, основанный на дифференциальной теории Галуа. Происхождение и формулировка основных результатов имеется в [12]. Предположим, что $H$ — гамильтониан, а $z(t)$ — это решение, отличающееся от точки равновесия. Полагая, что $t \in \mathbb{C}$ — множество комплексных чисел, получаем, что решение $z$ определяет риманову поверхность $\Gamma$. Мы можем рассмотреть вариации первого порядка гамильтонова векторного поля вдоль $\Gamma$. С этими (линейными) уравнениями связана группа Галуа $G$ расширения Пикара–Вессио основного поля функций (определенного коэффициентами вариаций в $\Gamma$). В [13] получен следующий ключевой результат, известный как теорема Моралеса–Рамиса.

**Теорема 3.** *Пусть $H$ задает вполне интегрируемую систему с мероморфными первыми интегралами в окрестности $\Gamma$. Тогда единичный элемент $G^0$ группы $G$ является абелевым.*

Использование информации, содержащейся в вариациях высшего порядка, выглядит вполне естественным. Для продолжения исследования удобно сначала проверить естественных кандидатов. Для этого мы рассмотрели уравнения в вариациях более высокого порядка вдоль решения Г Х–Х системы с $\lambda = 1/2$. Выбранное решение весьма простое, оно задается эллиптическими интегралами, и Г оказывается тором с одной исключенной точкой.

Независимые проверки были выполнены с помощью численного интегрирования вдоль комплексных путей в плоскости времени и при помощи символьных вычислений с разложениями эллиптических функций для поиска решений уравнений в вариациях второго порядка вокруг особенности в Г. Эти проверки не выявили препятствий для интегрируемости. При переходе к третьему порядку оказалось (с прекрасным совпадением для обоих методов), что отсутствие коммутативности предотвращает интегрируемость.

Это свидетельство подталкивает нас на доказательство того, что при подходящем определении групп Галуа $G^k$, связанных с уравнениями в вариациях порядка $k$, $k \in \mathbb{N}$, единичные элементы $(G^k)^0$ всех этих групп Галуа должны быть абелевыми. Происхождение, подробные формулировки и доказательства имеются в [14].

В частности, этот результат определяет счетное множество необходимых условий, которые должны выполняться для интегрируемого гамильтониана. Остается, однако, открытым вопрос — можно ли гарантировать, что система является интегрируемой в случае, когда все эти условия выполнены.

### 2.4. Хореографические решения задачи $N$ тел

В этом примере мы ограничимся плоскими движениями. Очень мало решений задачи $N$ тел известны в явном виде. Они принадлежат к так называемым решениям относительного равновесия (*pop*) и решениям, полученным из них. В *pop*-решениях взаимные расстояния между телами остаются неизменными и все они вращаются вокруг центра масс, как если бы они были твердым телом. Среди *pop*-решений существуют простые решения, когда $N$ масс равны и занимают места в вершинах регулярных $N$-угольников. В этом случае очевидно, что все тела двигаются вдоль одного и того же пути. Более того, если мы пронумеруем тела цифрами $0, 1, \ldots, N-1$ согласно порядку, в котором они проходят через данную точку пути, тогда положение тела с номером $k$ будет $\varphi(t-kT/N)$, когда тело с номером 0 находится в положении $\varphi(t)$, где $T$ обозначает период решения, то есть временной сдвиг от одного тела к другому является постоянным.

Мы можем спросить, существуют ли другие периодические решения с теми же самыми свойствами: тела движутся вдоль одного и того же пути с постоянным сдвигом по времени. Эти решения называются *хореографиями*. *Pop*-решения на $N$-угольнике являются тривиальными хореографиями.

Недавно Шенсине и Монтгомери [6] с использованием вариационных методов было доказали существование первого нетривиального хореографического решения для задачи трех тел. Путь представляет собой кривую в виде восьмерки, и это решение находится на уровне нулевого значения момента количества движения. Весьма удивительно, что эта траектория является полностью эллиптической внутри этого уровня (задача с тремя степенями свободы). Более того, достаточные условия для применимости КАМ-теоремы были проверены с использованием локальной нормальной формы, коэффициенты которой были получены численно [21].

Для задачи $N$ тел с $N > 3$ доказательство существования отсутствует, несмотря на большое количество примеров, полученных численным путем [5, 19]. Как обычно, в такого рода задачах сложности в доказательствах возникают из-за того, что сложно показать, что процесс минимизации действия для нахождения этих решений не приводит к траекториям со столкновениями. С другой стороны, доказательство существования хореографических решений является простым, если потенциал Ньютона заменен потенциалом «сильного взаимодействия» (вида $1/r^{\alpha}$, $\alpha \geqslant 2$ вместо $1/r$).

Возвращаясь к задаче трех тел, естественно задать вопрос о существовании хореографических решений помимо треугольника (решение Лагранжа) и решений в виде восьмерки. Эта задача исследовалась в [21] и были обнаружены 344 дополнительных хореографии. Они существенно отличаются от решения в виде восьмерки (то есть они получены не как спутники восьмеркообразного решения или не как относительные хореографии, полученные из восьмерки изменением момента количества движения до получения соизмеримых частот; подробности и точные определения см. в [21]). Из этих численных экспериментов, из вида различных путей и способа организации этих хореографий в семейства становится ясно, что множество хореографических *классов* в задаче трех тел не ограничено.

Методология для их нахождения может быть легко описана. Пусть $(x_j, y_j)$ — положение массы $b_j$ из масс $m_j = 1/3$, $j = 1, 2, 3$. Предположим, что начальные условия находятся в равнобедренной конфигурации и подходящие скорости равны

$$x_3 = x_2, \quad y_3 = -y_2, \quad \dot{x}_3 = -\dot{x}_2, \quad \dot{y}_3 = \dot{y}_2.$$

Тогда $(x_1, y_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1)$ определяются из интегралов центра масс. В этом равнобедренном треугольнике ось симметрии проходит через $b_1$. Предположим, что в некоторый момент времени $\tau > 0$ мы находимся в другой равнобедренной конфигурации и $b_2$ лежит на оси симметрии. Пусть $\beta$ — угол между начальной и текущей осями симметрии. Если вращение на угол $-\beta$, примененное к положениям и скоростям в момент времени $\tau$ приводит снова к начальным условиям, тогда возникает относительная хореография периода $6\tau$.

Следовательно, мы можем сканировать сетку начальных условий равнобедренного типа (на заданном уровне энергии, скажем, $h = -1/2$, это трехмерное подмногообразие). Ограничим максимальное время интегрирования умеренным значением $\tau^* = 5$ и отбросим условия, слишком близко приближающиеся к столкновению. Если для некоторого $\tau < \tau^*$ мы вновь попадаем в равнобедренную конфигурацию, и выше описанное вращение приводит к условиям, близким к начальным, то выполняется уточнение до получения относительной хореографии при помощи метода Ньютона. Поскольку нас интересуют *истинные* хореографии, то есть в неподвижной системе координат, то предыдущие решения продолжаются относительно момента количества движения, пока в процессе продолжения не будет найдена истинная хореография, подробности см. в [21].

Следует отметить, что среди этих хореографий только решение в виде восьмерки лежит на нулевом уровне момента количества движения.

## 2.5. Расщепление сепаратрис в многочастотном случае

Рассмотрим интегрируемую (аналитическую) гамильтонову систему с одной степенью свободы, имеющую гомоклиническую траекторию, связанную с седлом, то есть сепаратрису (например, маятник). Предположим, что мы добавили к ней быстрое периодическое возмущение. Возникает естественный динамический вопрос о том, какова судьба сепаратрисы, то есть как сепаратриса расщепляется при возмущении. Мы можем считать, что наша задача эквивалентна (изменяя масштаб времени) задаче, когда частота конечна и размер возмущения мал. Эта задача важна поскольку, она является моделью для поведения системы с двумя степенями свободы вблизи резонанса.

Переходя к более высоким размерностям, мы можем проанализировать аналогичные задачи, заменить маятник на маятник с ротатором[3]. Это определяет модель поведения вблизи про-

[3] Имеется в виду система, состоящая из обычного маятника и ротатора, которые в невозмущенной ситуации не взаимодействуют. — *Прим. пер.*

стого резонанса системы с тремя или более степенями свободы. Эту ситуацию мы будем называть *многочастотным* случаем. Отметим, что задача с кратными резонансами сложнее и о ней доступна очень скудная информация.

Априорные оценки в представленной задаче могут быть получены применением общих результатов из [17]. Соответствующие частоты — это частота вращения (скажем, $\nu$) и внешняя частота (например, равная 1). Пусть $\omega = (\nu, 1)^T \in \mathbb{R}^d$. Если $\omega$ удовлетворяет диофантовому условию $|(k,\omega)| \geqslant b|k|^{-\tau}$, $\forall k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ при $b > 0$, $\tau < d-1$, тогда оценка для расщепления имеет вид $\exp(-c_1/\varepsilon^{c_2})$, где $c_1 > 0$, $c_2 = 1/(\tau+1)$. Отметим, что информация, которую можно получить о константе $c_1$, очень приближенная. Это противоположно одночастотному случаю, в котором известно, что $c_1$ связана с (комплексными) особенностями параметризации возмущенной сепаратрисы.

Модельный пример этой ситуации изучался в [17], включая символические и численные исследования. В частности, там показано, как строить локальные аппроксимации для инвариантных многообразий инвариантного тора и как глобализовать их для измерения расщепления. Если существует несколько расщепляющихся переменных действия, мы можем рассматривать расщепление по каждой из них или *вектор расщепления*. Эти функции определены на торе. Более простой подход может заключаться в получении так называемого *потенциала расщепления*, градиент которого является вектором расщепления. Из локальных аппроксимаций вектор расщепления вычисляется с помощью численного интегрирования (с использованием, при необходимости, арифметических операций с многократно увеличенной точностью).

Классическим примером для этой задачи является пример Арнольда для диффузии. Рассматриваемый гамильтониан (эквивалентный исходному примеру) равен

$$H(x, I_2, I_3, y, \theta_2, \theta_3) = \frac{1}{2}(x^2 + I_2^2) + I_3 + \varepsilon(\cos y - 1)(1 + \mu(\cos\theta_2 + \cos\theta_3)),$$

где маятник с ротатором получается, если $\mu = 0$. Этот пример использовался как модель для диффузии, но наличие двух малых параметров $\varepsilon$, $\mu$ не является естественным. Более того, для того чтобы иметь возможность измерить потенциал расщепления при $\mu \neq 0$, требуется, чтобы $\mu$ было экспоненциально мало относительно $\varepsilon$.

В [23] эта модель рассматривалась с $\mu = \varepsilon$. Обычный метод для измерения расщепления, то есть метод Мельникова, не работает. Причиной является то, что существует «слишком мало» гармоник в возмущении. Вместо этого нужно модифицировать метод, чтобы определить вклад различных гармоник в расщепление. *Модифицированный метод Мельникова* был представлен в [23]. Следует отметить, что нужно учитывать не только начальные гармоники, которые представлены в возмущении. Также существенными являются гармоники более высокого порядка, которые возникают, когда вариации более высокого порядка включаются как линейные комбинации слагаемых меньшего порядка. Эквивалентным образом тип слагаемых, которые могут внести важный вклад в расщепление, может быть найден с помощью усреднения. Как обычно затем следует «оптимизировать» для определения, какие слагаемые являются доминирующими как функции от $\varepsilon$.

Однако, ввиду того, что коэффициенты высокого порядка сильно зависят от комбинаторных выражений коэффициентов меньшего порядка, может оказаться (и было выяснено, что *так происходит*), что слагаемые, которые являются кандидатами в доминирующие, имеют слишком малый коэффициент.

Предложенный подход тестировался по отношению к символьным вычислениям и непосредственным точным численным вычислениям расщепления. Вновь компьютер оказался полезным инструментом для обнаружения нескольких сложных свойств. В частности, он позволяет определить оптимальное значение для верхней грани расщепления, когда мы рассматриваем в текущей модели «вращательную» часть с частотой $\beta$, то есть мы изучаем расщепление сепаратрисы, которое возникает при $\mu = 0$, если $I_2 = \beta$. Более конкретно мы можем сформулировать

**Следствие 1.** *Пусть $\beta$ — число постоянного типа, то есть частное $q_n$ разложения в непрерывную дробь ограничено. Пусть $\underline{c}$ — наилучшая диофантова константа для $\beta$, то есть* $\liminf\{|q\beta - p|$ *для* $(p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$. *Тогда двумерные инвариантные торы гамильтониана Арнольда имеют расщепление, верхняя грань которого имеет строгую оценку вида*

$$\exp\Big(-(8\pi\underline{c}(1+\beta))^{1/2}\left(\frac{|\ln\eta|}{\eta}\right)^{1/2}\Big),$$

*где* $\eta^2 = \varepsilon = \mu$.

## 3. Заключение

В рассмотренных выше примерах отсутствуют подробности о различных алгоритмах, использованных при их реализации на компьютере. Эти примеры предназначены для того, чтобы показать, как это «не так хорошо используемое» средство фактически является чрезвычайно полезным для практических и теоретических задач. Она требует, однако, хорошего знания численного анализа, компьютерных наук и теории сложности.

Более того, построение всех алгоритмов, как символьных, так и численных, должно направляться, если возможно, априорным знанием свойств системы. На этом пути алгоритмы могут быть модифицированы для конкретных нужд, получая должную точность и эффективность.

Многие алгоритмы, особенно те, которые касаются существования, свойств и бифуркаций неподвижных точек, периодических орбит, гомоклинических связей и т. п., могут быть превращены из численной информации в строгие математические доказательства систематическим образом. Типичная теорема, которая применяется, «когда $\varepsilon < \varepsilon_0$», может быть квантована для получения точного значения $\varepsilon_0$ (даже если они весьма пессимистичны) и тогда это можно проверить, используя нужную точность с правильным контролем ошибок. Я предполагаю, что в ближайшем будущем это будет рутинная (и даже автоматизированная) задача.

## Список литературы


[1] Broer H. W., Simó C. *Hill's equation with quasi-periodic forcing: resonance tongues, instability pockets and global phenomena* // Bul. Soc. Bras. Mat., 1998, Vol. 29, p. 253–293.

[2] Broer H. W., Simó C., Tatjer J. T. *Towards global models near homoclinic tangencies of dissipative diffeomorphisms* // Nonlinearity, 1998, Vol. 11, p. 667–770.

[3] Broer H. W., Hoveijn I., van Noort M., Simó C., Vegter G. *The parametrically forced pendulum: a case study in* $1+\frac{1}{2}$*- degrees of freedom.* Preprint, 2001.

[4] Broer H. W., Simó C., Vitolo R. *Bifurcations and strange attractors in the Lorenz-84 climate model with seasonal forcing* // Nonlinearity, 2002, Vol. 15, No 4, p. 1205–1267.

[5] Chenciner A., Gerver J., Montgomery R., Simó C. *Simple choreographic motions of N bodies: a preliminary study.* In: 'Geometry, Mechanics and Dynamics', New York: Springer, p. 287–308. Рус. пер. см. в: Современные проблемы хаоса и нелинейности. Сб. работ. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, с. 206–232.

[6] Chenciner A., Montgomery R. *A remarkable periodic solution of the three body problem in the case of equal masses* // Annals of Mathematics, 2000, Vol. 152, p. 881–901. Рус. пер. см. в: Современные проблемы хаоса и нелинейности. Сб. работ. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, с. 183–205.

[7] Cincotta P. M., Simó C. *Simple tools to study global dynamics in non-axisyminetric galactic potentials — I* // Astronomy & Astrophysics Supp., 2000, Vol. 147, p. 205–228.

[8] Grau M., Simó C. *Invariant manifolds in Sitnikov problem*. 2002, in progress.

[9] Martinez R., Simó C. *Simultaneous binary collisions in the planar four body problem* // Nonlinearity, 1999, Vol. 12, p. 1–28.

[10] Martinez R., Simó C. *The degree of differentiability of the regularization of simultaneous binary collisions in some N-body problems* // Nonlinearity, 2000, p. 2107–2130.

[11] McGehee R. *A stable manifold theorem for degenerate fixed points with applications to celestial mechanics* // J. of Diff. Equations, 1973, Vol. 14, p. 70–88.

[12] Morales J. J. *Differential Galois Theory and Non-Integrability of Hamiltonian Systems*. Basel: Birkhauser, 1999.

[13] Morales J. J., Ramis J. P. *Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems I, II* // Methods and Applications of Analysis, 2001, Vol. 8, No 1, p. 33–96, 97–111.

[14] Morales J. J., Ramis J. P., Simó C. *Integrability of Hamiltonian systems and differential Galois groups of higher variational equations*. 2002, in progress.

[15] Moser J. *Stable and random motions in dynamical systems* // Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1973.

[16] Simó C. *Analytical and numerical computation of invariant manifolds*. In: Benest D., Froeschlé C. (Eds.) 'Modern Methods in Celestial Mechanics', Paris: Editions Prontières, 1990, p. 285–330.

[17] Simó C. *Averaging under fast quasi-periodic forcing*. In: Seimenis J. (Ed.) 'Hamiltonian Mechanics: Integrability and Chaotic Behaviour', NATO-ASI Series B: Physics. Plenum, New York, 1994, p. 13–34.

[18] Simó C. *Effective Computations in Celestial Mechanics and Astrodynamics*. In: Rumyantsev V. V., Karapetyan A. V. (Eds.) 'Modern Methods of Analytical Mechanics and their Applications', CISM Courses and Lectures 387 Springer, Heidelberg, 1998, p. 55–102.

[19] Simó C. *New families of solutions in N-body problems*. Proceedings of the ECM. Basel: Birkhauser, 2000. Рус. пер. см. в: Современные проблемы хаоса и нелинейности. Сб. работ. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, с. 233–251.

[20] Simó C. *Global dynamics and fast indicators*. In: Broer H. W., Krauskopf B., Vegter G. (Eds.) 'Dynamical Systems', IOP Publishing, Bristol, 2001, p. 373–390.

[21] Simó C. *Dynamical properties of the figure eight solution of the three-body problem*. In: Chenciner A., Cushman R., Robinson C., Xia Z. (Eds.) Proceedings of the Chicago Conference dedicated to Don Saari // Contemporary Mathematics, 2002, Vol. 292, p. 209–228.

[22] Simó C., Stuchi T. *Central stable/unstable manifolds and the destruction of KAM tori in the planar Hill problem* // Physica D., 2000, Vol. 140, p. 1–32. Рус. пер. см. в: Современные проблемы хаоса и нелинейности. Сб. работ. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, с. 90–141.

[23] Simó C., Vails T. *A formal approximation of the splitting of separatrices in the classical Arnold's example of diffusion with two equal parameters* // Nonlinearity, 2001, Vol. 14, p. 1707–1760.

[24] Ziglin S. L. *Branching of solutions and non-existence of first integrals in Hamiltonian mechanics I* // Fund. Anal. Appl., 1982, Vol. 16, p. 181–189.